1 Die Unvollständigkeit der Logik 2. Stufe

1.1 Zielsetzung

Das Ziel ist, zu zeigen, dass die Menge der allgemeingültigen Sätze 2. Stufe nicht aufzählbar ist. Dazu brauchen wir einige Hilfssätze über endliche Strukturen.

1.2 Wahrheit und Erfüllbarkeit in endlichen Strukturen

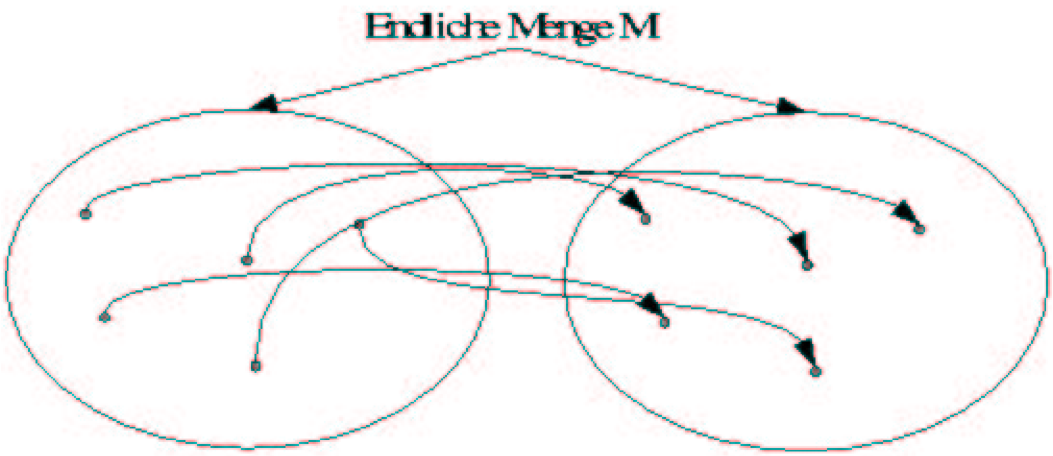
Definition 1.2.1

1. *Ein Satz ϕ heißt end-erfüllbar, wenn es eine endliche Struktur gibt, in der er gilt.*
   Die Menge dieser Sätze 1. Stufe heißt Φ_e

2. *Ein Satz ϕ heisst end-allgemeingültig, wenn er in allen endlichen Strukturen gilt.*
   Die Menge dieser Sätze 1. Stufe heisst Φ_a.

Ein Beispiel für einen Satz ϕ aus Φ_a ist, dass in einer endlichen Struktur jede injektive Funktion auch surjektiv ist:

$$\phi := \bigwedge x \bigwedge y \, (f(x) = f(y) \to x = y) \to \bigwedge x \bigvee y \, (x = f(y))$$



Dieser Sachverhalt lässt sich anhand dieser Abbildung recht gut erkennen: Wenn jedes Bild (rechts) nur ein Urbild (links) hat, und die Anzahlen von Bildern und Urbildern gleich sind, muss jedes Element der Zielmenge ein Urbild haben. Dass dies in unendlichen Mengen nicht gilt, lässt sich in $\mathcal{N}$ an der Nachfolgerfunktion $f(n) = n + 1$ sehen: Diese ist injektiv, aber 0 hat kein Urbild. Mit $\mathcal{N}$ trifft es auch auf alle aufzählbar unendlichen Mengen zu, die laut Definition isomorph zu $\mathcal{N}$ sind. Wenn man das Auswahlaxiom als Grundlage zulässt, das aussagt, dass jede überabzählbar unendliche Menge Übermenge einer abzählbaren ist, kann man das auch auf überabzählbar unendliche Mengen verallgemeinern.

1.3 Aufzählbarkeit von Φ_e

Satz 1.3.1 Φ_e *ist aufzählbar.*

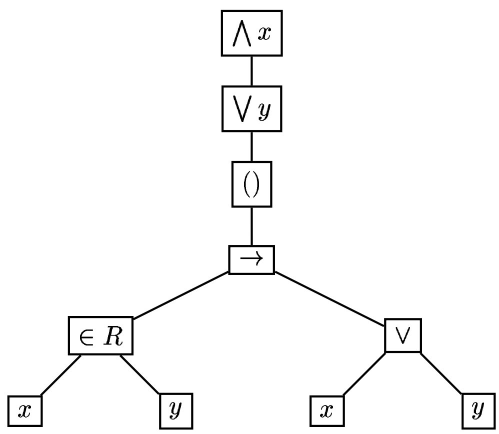
1.3.1 Beweis

Wenn eine Struktur endlich ist, können wir ihre endlich vielen Elemente in einer Tabelle aufschreiben. Mittels der Grammatik der Logik 1. Stufe können wir jeden Satz (syntaktisch) in seine einzelnen atomaren Sätze zerlegen. Dann überprüfen wir diese durch Nachschlagen in der Tabelle einzeln auf Wahrheit und erhalten so den Wahrheitswert des Satzes. Da alle Strukturen der Größe n isomorph zu der Struktur über $\{1, \ldots, n\}$ sind, reicht es, diese (endlich vielen) Strukturen statt die unendlich vielen, die dazu isomorph sind, zu betrachten ($\rightarrow$ Isomorphismuslemma). Diese Prozedur zum Testen der Wahrheit eines Satzes in einer endlichen Struktur wenden wir nun auf die endlich vielen Sätze der Länge kleiner n in den endlich vielen Strukturen über $\{1, \ldots, n\}$ an. Falls ein Satz in einer Struktur gilt, geben wir ihn aus.
Wenn wir nun n von 0 hochzählen, haben wir eine Aufzählprozedur für Φ_e. $\square$

Zerlegung eines Satzes mittels einer Grammatik

Satz	$\rightarrow$	Objektvariable | (Satz) | Quantor Objektvariable Satz
		| Satz Junktor Satz | Relation | $\neg$ (Satz)
Relation	$\rightarrow$	$<$ Objektvariablen $>$ $\in$ Relationskonstante

$\bigwedge x \bigvee y \, (< x, y > \in R \rightarrow x \vee y)$



Sobald man diese Zerlegung hat (Syntaxbaum genannt), kann man durch Einfüllen der Wahrheitswerte von den Blättern des Baumes an die Wahrheit des Satzes (1. Stufe) in einer bestimmten (endlichen!) Struktur herausfinden.

Das Isomorphismuslemma

Das Isomorphismuslemma sagt aus, dass Aussagen, die in einer Struktur gelten, auch in allen zu ihr isomorphen Strukturen gelten.
Dies stimmt deshalb, da man alle Elemente der isomorphen Strukturen bijektiv ineinander überführen kann. Wenn also zum Beispiel in der Struktur U_1: $x \in F$ gilt und die Abbildung g U_1 in die (isomorphe) Struktur U_2 abbildet, gilt in U_2: $g(x) \in g(F)$. Genauso, wenn in U_2: $y \in H$ gilt, gilt in U_1: $g^{-1}(y) \in g^{-1}(H)$.

1.4 Unentscheidbarkeit von Φ_e

Satz 1.4.1 Φ_e *ist nicht entscheidbar.*

1.4.1 Beweis

Hierzu definieren wir P, $M_p =< J, U >$, σ_p wie im Beweis der Unentscheidbarkeit der Logik 1. Stufe, d.h. M_p enthält die Konfigurationen des Programms P und σ_p beschreibt die Arbeitsweise von P in M_p. Dann zeigen wir

$$P : \Box \to \mathit{halt} \text{ gdw. } \sigma_p \in \Phi_e$$

Denn, wenn P hält, macht das Programm nur endlich viele Schritte, M_p ist also endlich, und σ_p gilt in M_p, also $\sigma_p \in \Phi_e$.
Hingegen, wenn P nicht hält, macht das Programm unendlich viele Schritte und jedes Modell von σ_p enthält unendlich viele paarweise verschiedene Elemente, also $\sigma_p \notin \Phi_e$. $\Box$

1.5 Der Satz von Trahtenbrot

Satz 1.5.1 (Der Satz von Trahtenbrot) Φ_a *ist nicht aufzählbar.*

1.5.1 Beweis

$\phi \notin \Phi_e$ gdw. $\neg\phi \in \Phi_a$.
Da Φ_e aufzählbar, aber nicht entscheidbar ist, ist Φ_a nicht aufzählbar, sonst wären beide entscheidbar. $\Box$

1.6 Die Unvollständigkeit der Logik 2. Stufe

Satz 1.6.1 *Die Menge der allgemeingültigen Sätze 2. Stufe ist nicht aufzählbar.*

1.6.1 Beweis

Wir wählen einen Satz ϕ_{end}, der in allen endlichen Strukturen gilt (und nur diesen). Hier wählen wir als Beispiel dem oben genannten Satz, nur müssen wir ihn in Relationsschreibweise darstellen. Dann besteht unser ϕ_{end} aus drei Teilen, die ersten beiden beschränken die Relation R_f auf die Möglichkeiten einer Funktion und der dritte drückt die Aussage aus:

- Rechtseindeutigkeit: $\phi_{end1} := \bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \, (< x, y > \in R_f \wedge < x, z > \in R_f \to y = z)$
- Totalität: $\phi_{end2} := \bigwedge x \bigvee y \, (< x, y > \in R_f)$
- Aussage: $\phi_{end3} := \bigwedge x \bigwedge y \bigvee z \, (< x, z > \in R_f \wedge < y, z > \in R_f \to x = y) \to \bigwedge y \bigvee x \, (< x, y > \in R_f)$

$$\phi_{end} := \bigwedge R_f \, (\phi_{end1} \wedge \phi_{end2} \wedge \phi_{end3})$$

Dann ist $\phi \in \Phi_a$ gdw. $\phi_{end} \to \phi$ beweisbar ist.
Wenn nun die allgemeingültigen Sätze 2.Stufe aufzählbar wären, könnten wir sie aufzählen und jedesmal, wenn wir einen Satz dieser Form bekommen, bei dem ϕ 1.Stufe ist, ϕ ausgeben. Damit hätten wir eine Aufzählprozedur für Φ_a, was Trahtenbrots Satz widerspricht. $\square$